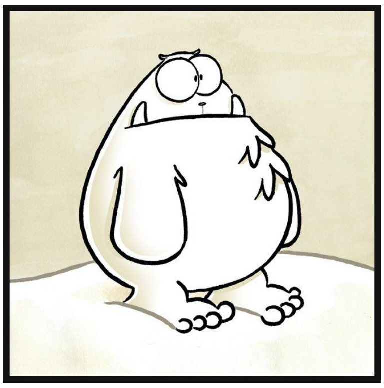
Einführung in die Yeti-Theorie

Technische Universität Kaiserslautern
Wintersemester 2015/16

Vorlesungsskript



~~Prof. Dr. Dr. yet.~~ Yan Myller

Vorwort

Die Yeti-Theorie ist eine sehr junge Disziplin der Mathematik, deren Potential hier am Fachbereich Mathematik entdeckt wurde. Wir werden im Verlauf der Vorlesung viele erstaunliche Resultate erhalten, sogar bereits zu Beginn des Einführungskapitels.
Erwähnt werden sollte, dass es auch eine äquivalente Theorie gibt, die von anderen Axiomen ausgeht als die hier behandelte. Gelegentlich wird dies in einer Randbemerkung erwähnt. Wir wählen hier nicht diese alternative Theorie, da sich Bezüge zur Praxis so leichter ergeben, was vor allem in einer Grundlagenvorlesung wie der hier vorliegenden von großer Bedeutung ist.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

Kapitel 1. Grundlagen 3

Kapitel 2. Der Yetiraum 5

Kapitel 3. Myller-Kraftsche These und Himalaya-Problem 7

Kapitel 4. Kurzer Einblick: Außerirdische Yetis 9

KAPITEL 1

Grundlagen

In der elementaren Yeti-Theorie, die wir hier ausschließlich behandeln, gehen wir davon aus, dass das Universum einer hinreichend großen Kugel im $\mathbb{R}^3$ entspricht, die wir der Einfachheit halber mit dem $\mathbb{R}^3$ selbst identifizieren. Um der Realität näher kommende Modelle zu entwickeln, bedarf es natürlich anderer Räume (s. Vertiefungsvorlesungen), aber die dort entwickelte Theorie lässt sich dann leicht auf die elementare Yeti-Theorie zurückführen. Außerdem muss unbedingt erwähnt werden, dass wir hier von einer Momentaufnahme der Welt ausgehen, bzw. es herrschen $-273°\mathrm{C}$, was der natürlichen Umgebung der Yetis jedoch recht nahe kommt.

Definition 1.1
(a) Eine Menge $\mathfrak{y} \subseteq \mathbb{R}^3$, die offen, nicht abgeschlossen, beschränkt, zusammenhängend und kompakt ist, heißt *Yeti erster Ordnung* (kurz: *Yeti*).
(b) Mit $\not{\mathfrak{y}} := \emptyset \subseteq \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir den *leeren Yeti*.

Bemerkung 1.2 In zahlreichen Vertiefungsvorlesungen werden auch Yetis höherer Ordnung (sog. β-, γ-, …-Yetis) behandelt. Yetis erster Ordnung (α-Yetis) sind in diesem Kontext der speziellste Fall. Die entscheidende Erweiterung ist diejenige, dass sich Yetis analog auf topologischen Räumen definieren lassen.
In der im Vorwort erwähnten alternativen Theorie wird in der Definition eines Yetis gefordert, dass dieser weiß ist. Mit unserer Definition und dem folgenden Satz kann diese Eigenschaft bewiesen werden.
Beachte: Der leere Yeti ist *nicht* das Gegenteil des vollen Yetis, bzw. des dichten Yetis. Dieser ist dicht in $\mathbb{Y}$ (s. später).

Bereits jetzt sind wir in der Lage, den mächtigen Hauptsatz der Yeti-Theorie zu beweisen, der das grundlegende Mittel sein wird, die weitere Theorie zu entwickeln.

Theorem 1.3 (Hauptsatz der Yeti-Theorie, Existenzsatz von Meßner)
Es gibt keine Yetis.

Beweis. Sei $\mathfrak{y}$ ein Yeti. Nach Definition ist $\mathfrak{y}$ kompakt und damit abgeschlossen. Widerspruch zur Definition. □

Korollar 1.4 (klassiches Yeti-Axiom, Van-Veen-Lemma etc.)

(a) Alle Yetis sind weiß. (klassisches Yeti-Axiom)

(b) Alle anderen Yetis sind lila. (Van-Veen-Lemma)

(c) Alle Yetis sind betrunken.

(d) Alle Yetis sind dumm.

Beweis.

(a) Angenommen, es gibt einen Yeti, der nicht weiß ist. Widerspruch zu Theorem 1.3.

(b) Trivial.

(c) Diesen Teil überlassen wir dem Leser als einfache Übungsaufgabe.
Hinweis: Der entscheidende Beweisschritt geht ganz analog zu Teil (a).

(d) Yetis sind per Definition beschränkt. □

Bemerkung 1.5 (Vermutung vom globalen Yeti) Es gibt Mathematiker, welche die folgende waghalsige Vermutung vertreten:

$$\text{Ist } \mathsf{E} \text{ eine Eigenschaft, dann gilt: Alle Yetis erfüllen } \mathsf{E}.$$

Bisher ist noch kein stichhaltiger Beweis dafür bekannt.

Bemerkung 1.6 Die Tragweite des Hauptsatzes kann gar nicht genug betont werden. Er beantwortet beispielsweise direkt zu Beginn die Frage nach der praktischen Anwendbarkeit der elementaren Yeti-Theorie konstruktiv: Es gibt keine! Kein Gebiet der Mathematik ist dazu in der Lage, auf diese klare Weise seine eigene Mächtigkeit zu beschreiben.
Außerdem ist es mit seiner Hilfe sehr einfach, eine allseits bekannte aber oft axiomatisch vorausgesetzte Eigenschaft von Yetis (nämlich weiß zu sein), sowie das damit zusammenhängende VanVeen-Lemma zu beweisen. Wir werden im Laufe der Vorlesung noch viele weitere Anwendungen und Folgerungen aus diesem Satz sehen.

Korollar 1.7 *Der leere Yeti* $\gamma_{\emptyset}$ *ist kein Yeti.*

Beweis. Folgt aus dem Hauptsatz.
Alternativer Ansatz: Wäre der leere Yeti eine Yeti, wäre er nach Korollar 1.4 (c) voll. Widerspruch. □

KAPITEL 2

Der Yetiraum

Da sich herausgestellt hat, dass das angegeben Yeti-Modell nicht hinreichend allgemein für weiterführende Anwendungen ist, sehen wir ab jetzt den leeren Yeti als Quasi-Yeti an:

Definition 2.1 (a) Setze $\mathsf{Y} := \{y \subseteq \mathbb{R}^3 \mid y \text{ Yeti}\} \cup \{\not{y}\}$.

(b) Die Menge der Vereinigungen von Elementen aus Y wird mit $\mathbb{Y} := \left\{\bigcup_{y \in \mathsf{X}} y \mid \mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y}\right\}$ bezeichnet. Beachte, dass es sich um disjunkte Vereinigungen handelt.

(c) Für $x, y \in \mathbb{Y}$ definiere $x \sim y :\Longleftrightarrow x = y$. *Übungsaufgabe:* Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Y}$ ist.

Der *Yetiraum über* $\mathbb{R}$ ist definiert als ${}^{\mathbb{Y}}\!/_{\sim}$. Trotz großer Verwirrung bezeichnen wir ihn ebenfalls mit $\mathbb{Y}$.

(d) Für $x, y \in \mathbb{Y}$ schreiben wir statt $x \cup y$ auch $x + y$, induktiv für größere Summen. Also ist $\mathbb{Y} = \left\{\sum_{y \in \mathsf{X}} y \mid \mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y}\right\}$.

(e) Für $y \in \mathbb{Y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bezeichne $\lambda y := \{\sqrt[3]{\lambda} z \mid z \in y\}$ die *Streckung* von y um den Faktor λ (kann je nach Betrag von λ sehr schmerzhaft sein). Speziell $-y$ heißt *Kontra-* oder *Anti-Yeti* zu y. Beim Zusammentreffen von y und $-y$ kommt es unweigerlich zu einem erbitterten Kampf, der in der Regel für beide tödlich endet.

(f) Die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}} \colon \mathbb{Y} \to [0, \infty)$, die jeder Vereinigung von Yetis das Volumen zuordnet, das sie zusammen im Raum einnehmen, heißt *Yeti-Norm*.

Bemerkung 2.2 Wenn wir im Folgenden von einem Yeti $y \in \mathbb{Y}$ sprechen, meinen wir natürlich eine Vereinigung von Yetis in $\mathbb{Y}$. Unter Beachtung des Hauptsatzes ist dies keine wesentliche Ungenauigkeit.

Wir kommen nun zur interessanten Tatsache, dass wir auf dem Raum der Yetis eine bekannte Struktur wiedererkennen können:

Theorem 2.3 $\mathbb{Y}$ *zusammen mit der oben eingeführten Addition, skalaren Multiplikation und Yeti-Norm bilden einen separablen Banachraum über* $\mathbb{R}$.

Beweis. Vektorraum: $(\mathbb{Y}, +)$ ist offenbar eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\not{y}$, wenn man beachtet, dass $y + (-y) = \not{y}$ nach Definition. Die Abgeschlossenheit unter der skalaren Multiplikation ist ebenfalls klar, so auch die restlichen Vektorraumaxiome.

Normeigenschaften: Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ eine Norm auf $\mathbb{Y}$ ist: $\forall\, y \in \mathbb{Y} : \|y\|_{\mathbb{Y}} \geq 0$ klar.

N1: $\|y\|_{\mathbb{Y}} = 0 \Leftrightarrow y = y_{\emptyset}$ klar, da jeder andere Yeti ein echtes Körpervolumen haben muss.

N2: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda y\|_{\mathbb{Y}} = |\lambda|\|y\|_{\mathbb{Y}}$ ebenfalls klar.

N3: $$\|x+y\|_{\mathbb{Y}} \begin{cases} \leq \|x\|_{\mathbb{Y}} + \|y\|_{\mathbb{Y}} & x \text{ und } y \text{ praktizieren Koitus} \\ = \|x\|_{\mathbb{Y}} + \|y\|_{\mathbb{Y}} & \text{sonst} \end{cases} \leq \|x\|_{\mathbb{Y}} + \|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Separabilität: Nach Korollar 1.4 (c) ist jeder Yeti y betrunken. D.h. $\{y\}$ liegt dicht in $\mathbb{Y}$.

Vollständigkeit: Man kann zeigen (*Übungsaufgabe*), dass $Y = \{y_{\emptyset}\}$ gilt und daraus $\mathbb{Y} = \{y_{\emptyset}\}$ folgern. Sei nun $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Y}$ eine Cauchy-Folge von Yetis. Wegen $\mathbb{Y} = \{y_{\emptyset}\}$ gilt also $y_n = y_{\emptyset}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so, dass $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Longrightarrow \forall\, n \geq n_0 : \|y_n - y_{\emptyset}\|_{\mathbb{Y}} = \|y_{\emptyset} - y_{\emptyset}\|_{\mathbb{Y}} = 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $\lim_{n\to\infty} y_n = y_{\emptyset}$. □

Bemerkung 2.4 Im ersten Fall im Beweis der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ wird in der Literatur oft auch $<$ statt $\leq$ benutzt. Aufgrund mangelnder Kenntnis über das Sexualverhalten von Yetis wird hier allerdings vorsichtshalber die Gleichheit im Rahmen des Möglichen gelassen.

Zwar ist $\mathbb{Y}$ keine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^3$, aber $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ lässt sich zu einem Maß auf $\sigma(\mathbb{Y})$ fortsetzen und stimmt dort mit dem Lebesgue-Maß überein. Dieses Maß wird mit β bezeichnet. Lässt man Yeti-Nullmengen als Yetis zu, so ergibt sich ein neuer Yeti-Begriff, der sog. β-Yeti. Der Hauptsatz sagt dann, dass β-Yetis β-fast nicht existieren.

Bemerkung 2.5 (Ausblick)

Diese Theorie lässt sich leicht auf den komplexen Yeti-Raum übertragen, der ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist. Ist $y \in \mathbb{Y}$ ein Yeti, so ist beispielsweise iy der *induzierte imaginäre Yeti* zu y. Sein komplex konjugierter Yeti $-iy$ ist in diesem Fall genau sein Anti-Yeti. Dies ist die Grundlage der ***komplexen Yeti-Theorie***.

In der sog. ***algebraischen Yeti-Theorie*** befasst man sich mit Gruppen von Yetis, Körpererweiterungen, lokalen Yetis (vgl. Bemerkung 1.5) und polarer Geometrie.

In der ***algorithmischen Yeti-Theorie*** geht es um die explizite Konstruktion von Yetis. Bisher war diese Teildisziplin jedoch erfolglos. Es wird vermutet, dass dies mit dem Hauptsatz zusammenhängt.

KAPITEL 3

Myller-Kraftsche These und Himalaya-Problem

Die Begründung der Yeti-Theorie geht auf das hier behandelte Himalaya-Problem zurück.

Bemerkung 3.1 (Historisches) In einer Übung zur Vorlesung „Formale Grundlagen der Programmierung" im SS12 an der TU Kaiserslautern wurde gefragt, ob es einen Algorithmus gibt, der die $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto$ [*die Anzahl der Yetis, die im Himalaya in über* n *Metern Höhe leben*] berechnet. Unter der Annahme, dass es nur endlich viele Yetis im Himalaya gibt, konnte man dies mit ja beantworten. Der Drang, diese Annahme zu beweisen, öffnete die Tür zur modernen Yeti-Theorie. Den Beweis, der hier gegeben wird, kann man natürlich mithilfe des Haupsatzes, der erst später gefunden wurde, stark verkürzen. Doch wir wollen uns um der Schönheit der Materie Willen und zu Ehren der Begründer deren Beweis vorführen. Zu deren Mitteln gehörten bereits die Yeti-Norm sowie das Yeti-Maß β.

Bemerkung 3.2 (Myller-Kraftsche These) Diese berühmte, zur Zeit ihrer Formulierung nicht beweisbare These besagt, dass jeder Yeti $y \in \mathbb{Y} \setminus \{\mathfrak{y}\}$ aus mindestens einem Atom besteht. Dies wird im Beweis der zentralen Aussage die entscheidende Wendung bringen.

Theorem 3.3 *Die Anzahl der Yetis im Himalaya ist endlich. Insbesondere gibt es einen Algorithmus, der die Funktion* f *aus Bemerkung 3.1 berechnet.*

Beweis. Sei $H \subset \mathbb{R}^3$ der Himalaya.
$\Rightarrow H \subset$ Asien und Asien ist beschränkt $\Rightarrow H$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ Quader Q mit $H \subseteq Q$.
$V(Q) < \infty$ bezeichne das Volumen von Q.
Für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^3$ sei $\mathbb{Y}_A$ die Menge der Yetis, die in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ leben.
Sei α die minimale Größe eines Atoms. Aus der Myller-Kraftschen These folgt

$$\gamma := \inf_{y \in \mathbb{Y}} \{\|y\|_{\mathbb{Y}}\} \geq \alpha > 0.$$

Angenommen, es gibt unendlich viele Yetis im Quader $Q \Rightarrow \exists\, \widetilde{\mathbb{Y}_Q} \subseteq \mathbb{Y}_Q$ abzählbar mit $\widetilde{\mathbb{Y}_Q} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{42}, \ldots\}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_{\mathbb{Y}} \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha = \alpha n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Für die Vereinigung $U := \bigcup_{y \in \mathbb{Y}_Q} y$ aller Yetis in Q gilt also wegen $U \subseteq Q$

$$\infty = \int_U 1 \, d\beta \leq \int_Q 1 \, d\beta = V(Q) < \infty, \qquad \text{Widerspruch.}$$

$\Rightarrow \mathbb{Y}_Q$ endlich $\Rightarrow \mathbb{Y}_H$ endlich, da $H \subseteq Q$. □

Bemerkung 3.4 Wie bereits angekündigt, geht die Myller-Kraftsche These hier entscheidend ein, denn ansonsten hätten wir nicht $\gamma > 0$ garantieren können. Es könnte ja sonst eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Yetis mit $\|y_n\|_{\mathbb{Y}} = 2^{-n}$ geben. Damit könnten sich diese Yetis abzählbar stapeln, mit Gesamtvolumen $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 2$.
Ein Fall wurde in diesem Beweis vergessen, nämlich dass fast alle Yetis in Q Geschlechtsverkehr haben. Es wird aber davon ausgegangen, dass dies nicht der Fall sein kann. Das folgende Lemma schließt in diesem Fall die Lücke.

Lemma 3.5 *Jede Reihe über nicht-leere Yetis, von denen unendlich viele* keinen *Geschlechtsverkehr haben, divergiert.*

Beweis. Sei $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Y}$ eine solche Folge von Yetis. Setze γ und α wie im Beweis des obigen Theorems.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $\mathcal{Y}_n := \{y_i \mid i \leq n\}$ und $\mathcal{K}_n := \{y_i \mid i \leq n, y_i \text{ praktiziert Koitus}\} \subseteq \mathcal{Y}_n$.
Nach Voraussetzung gilt $|\mathcal{Y}_n \setminus \mathcal{K}_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.
Angenommen y_n konvergiert gegen einen Yeti $y^* \in \mathbb{Y}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i=0}^{n} y_i\Big\|_{\mathbb{Y}} &= \Big\| \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \in \mathcal{K}_n}}^{n} y_i + \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \notin \mathcal{K}_n}}^{n} y_i \Big\|_{\mathbb{Y}} \\
&= \underbrace{\Big\| \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \in \mathcal{K}_n}}^{n} y_i \Big\|_{\mathbb{Y}}}_{:= k_n \geq 0} + \Big\| \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \notin \mathcal{K}_n}}^{n} y_i \Big\|_{\mathbb{Y}} \qquad \text{(versch. Koituszusammenhangskomponenten)} \\
&= k_n + \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \notin \mathcal{K}_n}}^{n} \|y_i\|_{\mathbb{Y}} \;\geq\; 0 + \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \notin \mathcal{K}_n}}^{n} \gamma \;\geq\; \sum_{\substack{i=0 \\ y_i \notin \mathcal{K}_n}}^{n} \alpha = \alpha \cdot |\mathcal{Y}_n \setminus \mathcal{K}_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Norm ist y^* also unbeschränkt. Widerspruch zur Definition. □

Bemerkung 3.6 Dieses Lemma zeigt auf, dass beispielsweise die Exponentialfunktion auf $\mathbb{Y}$ sinnlos ist, da für alle Yetis y dann $\exp(y)$ ein unendlich großer Yeti wäre.

KAPITEL 4

Kurzer Einblick: Außerirdische Yetis

Definition 4.1

(a) Sei $\mathsf{y} \in \mathbb{Y}$ ein Yeti und R eine Umgebung von $\partial \mathsf{y}$, die nicht zu dick ist. Dann heißt $\overline{\mathsf{R}}$ eine *Rüstung* von y.

(b) (y, R) (kurz auch nur y) nennen wir dann einen *Yeti-Ritter*.

(c) $\mathbb{R}^3_{<0}$ heißt *dunkle Seite der Macht*.

(d) Die abgeschlossene Kugel mit Radius $\mathsf{1}$ um $(-\infty, -\infty, -\infty)$ heißt *Einheitstodesstern*.

(e) Falls es einen Yeti $\hat{\mathsf{y}} \subset \mathbb{R}^3_{>0}$ gibt mit $\sup_{\mathsf{x} \in \hat{\mathsf{y}}} \|\mathsf{x}\| = \sup_{\mathsf{y} \in \mathbb{Y}} \sup_{\mathsf{x} \in \mathsf{y}} \|\mathsf{x}\|$, nennen wir ihn *Meister* ι oder einfach ι.

Satz 4.2 *Falls ein Meister* ι *existiert, ist er eindeutig bestimmt und grün.*

Beweis. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: ($\iota = \mathrlap{\gamma}\emptyset$) Sei y ein weiterer Meister ι. Falls $\mathsf{y} \neq \iota$, ist y ein Yeti wie in Definition 1.1. Widerspruch zum Hauptsatz. $\Rightarrow \mathsf{y} = \iota$
Angenommen, ι hätte eine andere Farbe als grün $\Rightarrow \mathrlap{\gamma}\emptyset = \emptyset$ hat eine Farbe, was offenbar keinen Sinn ergibt.

2. Fall: ($\iota \neq \mathrlap{\gamma}\emptyset$) Widerspruch wie im 1. Fall mit y. $\square$